Table des caractères de $\mathfrak{S}_4$ et groupe d'isométries du tétraèdre

On souhaite compléter la table des caractères de $\mathfrak{S}_4$:

	1 C_1	6 C_2	3 $C_{2\cdot 2}$	8 C_3	6 C_4
$\mathbb{1}$	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	1	-1
χ_V	3	1	-1	0	-1
$\varepsilon\chi_V$	3	-1	-1	0	1
χ_S	$a=2$	0	$b=2$	$c=-1$	0

$C_1 = \{id\}$

$C_2 = \{$transpositions$\}$, taille : 6

$C_{2\cdot 2}$: $\{$doubles-transpositions$\}$, taille : 3

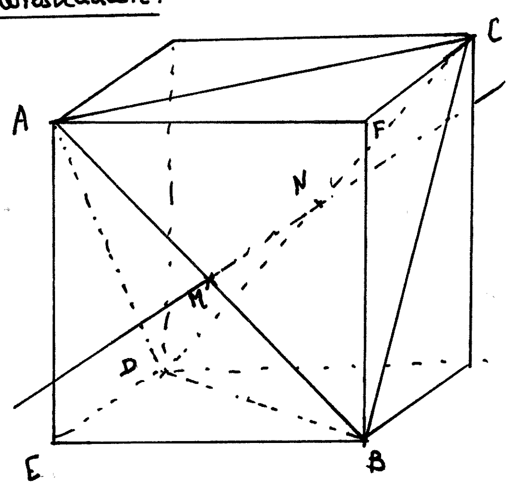
$C_3 = \{3\text{-cycles}\}$, taille : 8

$C_4 = \{4\text{-cycles}\}$, taille : 6

Les deux premières lignes sont immédiatement remplies.

<u>Lemme :</u> Soit T un tétraèdre régulier de l'espace affine euclidien de dimension 3. Le groupe $\mathrm{Isom}(T)$ des isométries préservant T est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.

<u>Démonstration :</u>



On commence par remarquer que $\mathrm{Isom}(T)$ induit une permutation des sommets $\{A, B, C, D\}$ de T. Ceci donne un morphisme de groupes

$$\varphi : \mathrm{Isom}(T) \longrightarrow \mathfrak{S}_4 .$$

- <u>φ est injectif :</u> si $\varphi(g) = id$, g préserve les 4 sommets, donc est l'identité.

- <u>φ est surjectif :</u> Il suffit de montrer que $\mathrm{Im}\,\varphi$ contient les transpositions.

Soit s la symétrie orthogonale par rapport au plan CDEF. Alors $s \in \mathrm{Isom}(T)$, et $\varphi(s) = (A\ B)$.

On fait de même pour les autres transpositions. Ceci prouve la surjectivité de φ.

Finalement, les groupes $\mathrm{Isom}(T)$ et $\mathfrak{S}_4$ sont isomorphes.

On note $\rho_V : \mathfrak{S}_4 \longrightarrow GL_3(\mathbb{R})$ la représentation linéaire naturelle de $\mathfrak{S}_4 \simeq \mathrm{Isom}(T)$ qui à $\sigma \in \mathfrak{S}_4 \simeq \mathrm{Isom}(T)$ associe la matrice de la partie linéaire de l'isométrie correspondante dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On note χ_V le caractère de ρ_V, i.e $\chi_V : \sigma \mapsto \mathrm{Tr}(\rho_V(\sigma))$.

Pour chaque classe de conjugaison, on choisira une base dans laquelle il sera simple de calculer la matrice de σ. Le choix n'affecte pas la valeur de $\mathrm{Tr}(\rho_V(\sigma))$.

- Sur C_1 : $\chi_V(id) = 3$

- Sur C_2 : On a $(A\ B) = s$, dont la matrice dans la base $(\vec{MD}, \vec{MC}, \vec{MA})$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, ce qui donne $\chi_V((A\ B)) = 1$.

- Sur C_{2-2} : On a $(A\ B)(C\ D) = s_{MN}$, la symétrie par rapport à la droite (MN).

Dans la base $(\vec{MN}, \vec{MA}, \vec{ME})$, la matrice de s_{MN} est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, ce qui donne $\chi_V((A\ B)(C\ D)) = -1$.

- Sur C_3 : La permutation $(B\ C\ D)$ peut être identifiée à la rotation autour de l'axe (AG), où G est le centre de gravité du triangle BCD (qui est équilatéral).

On a alors $\rho_V((BCD)) \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, où $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, donc $\chi_V((BCD)) = 1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0$.

- Sur C_4 : Soit O le milieu du tétraèdre. On a $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$.

En passant dans la base $(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})$, on a $\rho_V((A\ B\ C\ D)) \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

donc $\chi_V((A\ B\ C\ D)) = -1$.

Enfin, χ_V est irréductible, car $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = \frac{1}{24}\left(1 \times 3^2 + 6 \times {}^2 + 3 \times (-1)^2 + 8 \times 0 + 6 \times (-1)^2\right) = 1$.

On a ainsi obtenu la $3^{\text{ème}}$ ligne. La $4^{\text{ème}}$ ligne est obtenue en tordant χ_V par ε.

On note χ_5 le caractère irréductible restant.

On a $24 = 1 + 1 + 3^2 + 3^2 + \chi_5(id)^2$, donc $\chi_5(id)^2 = 2$. Comme χ_5 est le seul caractère de degré 2, on a $\varepsilon\chi_5 = \chi_5$, donc $\chi_5((A\ B)) = 0$ et $\chi_5((A\ B\ C\ D)) = 0$.

Enfin, $\langle \chi_5, 1 \rangle = 0$, donc $2 + 3b + 8c = 0$, ce qui donne $b = 2$ et $c = -1$.

$\langle \chi_5, \chi_v \rangle = 0$, donc $6 - 3b = 0$